

PAPER

MUSBAT BOG‘LIQ TASODIFIY MIQDORLAR SINFI UCHUN LIMIT TEOREMALARI

Qalandarova Muxlisa To‘lqinjon qizi^{1,*}

¹Navoiy Davlat Universiteti, Aniq fanlar fakulteti

* pulatovanurinis09@gmail.com

Abstract

Mazkur maqolada musbat bog‘liq tasodifiy miqdorlar sinfi va ular uchun limit teoremlari o‘rganilgan. Xususan, assotsiatsiyalangan tasodifiy miqdorlar tushunchasi kiritilib, ular uchun katta sonlar qonuni hamda markaziy limit teoremasining umumlashmalari keltirilgan. Kovariatsion tuzilmaning limit natijalarga ta‘siri tahlil qilingan. Olingan natijalar bog‘liq tasodifiy jarayonlarni o‘rganishda muhim ahamiyatga ega.

Key words: musbat bog‘liqlik, assotsiatsiya, kovariatsiya, katta sonlar qonuni, markaziy limit teoremasi, ehtimollar nazariyasi.

KIRISH

Ehtimollar nazariyasining klassik limit teoremlari asosan bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar uchun isbotlangan. Biroq real jarayonlarda tasodifiy miqdorlar ko‘pincha o‘zaro bog‘liq bo‘ladi. Xususan, iqtisodiy korsatkichlar, moliyaviy vaqt qatorlari, sug‘urta risklari va fizik modellar bog‘liq tasodifiy miqdorlar yordamida tavsiflanadi. Shu sababli bog‘liq tasodifiy miqdorlar uchun limit teoremlarini umumlashtirish dolzarb masalalardan biridir. Mazkur ishda musbat bog‘liq tasodifiy miqdorlar sinfi va ular uchun asosiy limit teoremlari o‘rganiladi.

ADABIYOTLAR TAHLILI

Bog‘liq tasodifiy miqdorlar nazariyasi 1960–1970–yillardan boshlab faol rivojlana boshlagan. Esary, Proschan va Walkup (1957) tomonidan assotsiatsiyalangan tasodifiy miqdorlar tushunchasi kiritilgan. Neyman (1980) va boshqalar tomonidan assotsiatsiyalangan ketma-ketliklar uchun markaziy limit teoremasi isbotlangan. Keyingi tadqiqotlarda kovariatsiya kamayish tezligi va moment shartlari ostida limit natijalar kengaytirilgan. Ushbu maqolada mazkur yo‘nalishdagi asosiy nazariy natijalar tizimlashtiriladi.

Compiled on: February 16, 2026.

Copyright: ©2026 by the authors. Submitted to International Journal of Science and Technology for possible open access publication under the terms and conditions of the [Creative Commons Attribution \(CC BY\) 4.0 license](#).

ASOSIY TUSHUNCHALAR

Musbat kovariatsion bog'liqlik

Ikki tasodifiy miqdor X va Y musbat bog'liq deyiladi, agar

$$\text{Cov}(X, Y) \geq 0.$$

Assotsiatsiyalangan tasodifiy miqdorlar

$X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlar oilasi assotsiatsiyalangan deyiladi, agar har qanday koordinatalar bo'yicha o'suvchi f va g funksiyalar uchun

$$\text{Cov}(f(X_1, \dots, X_n), g(X_1, \dots, X_n)) \geq 0.$$

Bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar assotsiatsiyalangan bo'ladi, biroq teskarisi har doim ham to'g'ri emas.

Musbat bog'liq tasodifiy miqdorlar uchun katta sonlar qonuni

Teorema 1 (Katta sonlar qonuni).

Faraz qilamiz:

- $\{X_n\}$ — assotsiatsiyalangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi;
- $\sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$;
-

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{i,j=1}^k |\text{Cov}(X_i, X_j)| < \infty.$$

U holda

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mathbb{E}X_k) \rightarrow 0$$

ehtimollik bo'yicha yaqinlashadi.

Isbot g'oyasi

Isbot Chebishev tengsizligi va dispersiyaning quyidagi ifodasiga asoslanadi:

$$\text{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j),$$

bu yerda $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

Kovariatsiyalar nazorat ostida bo'lgani sababli

$$\frac{\text{Var}(S_n)}{n^2} \rightarrow 0,$$

bu esa natijani beradi.

Musbat bog'liq tasodifiy miqdorlar uchun Markaziy limit teoremasi

Teorema 2 (Markaziy limit teoremasi).

Faraz qilamiz:

- $\{X_n\}$ — statsionar assotsiatsiyalangan ketma-ketlik;
- $\mathbb{E}X_n = 0$;
- $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$;
-

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\text{Cov}(X_1, X_{k+1})| < \infty.$$

U holda

$$\frac{S_n}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Izoh. Bu natija bog'liqsizlik talab qilmasdan normal yaqinlashishni ta'minlaydi. Kovariatsiyalarning yig'iluvchanligi asosiy shart hisoblanadi.

Dispersiya asimptotikasi

Statsionar holatda

$$\text{Var}(S_n) = n\sigma^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \gamma(k),$$

bu yerda

$$\gamma(k) = \text{Cov}(X_1, X_{k+1}).$$

Agar kovariatsiyalar yig'iluvchan bo'lsa, u holda

$$\frac{\text{Var}(S_n)}{n} \rightarrow \sigma^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k).$$

Bu limit dispersiya Markaziy limit teoremasida asosiy rol o'ynaydi.

AMALIY QO'LLANISHLAR

Musbat bog'liq tasodifiy miqdorlar quyidagi sohalarda qo'llaniladi: Moliyaviy vaqt qatorlari, sug'urta risk modellari, fazoviy statistik modellar, fizikadagi Ising tipidagi modellar, ishonchlilik nazariyasi. Limit teoremlari katta tanlanmalar asosida statistic xulosalar chiqarishda muhim vosita hisoblanadi.

XULOSA

Ushbu ishda musbat bog'liq tasodifiy miqdorlar sinfi va ular uchun limit teoremlari ko'rib chiqildi. Asosiy natijalar shuni ko'rsatadiki: bog'liqsizlik sharti zarur emas, assotsiatsiya sharti ostida katta sonlar qonuni o'rinli, kovariatsiyalar yig'iluvchanligi markaziy limit teoremasi uchun yetarli shart hisoblanadi. Olingan natijalar bog'liq tasodifiy jarayonlar nazariyasini rivojlantirishda muhim ahamiyatga ega.

LIST OF REFERENCES

1. Esary J.D., Proschan F., Walkup D.W. Association of random variables, with applications. Annals of Mathematical Statistics, 1967.
2. Newman C.M. Normal fluctuations and the FKG inequalities. Communications in Mathematical Physics, 1980.
3. Petrov V.V. Limit Theorems of Probability Theory. Oxford University Press, 1995.
4. Ibragimov I.A., Linnik Yu.V. Independent and Stationary Sequences of Random Variables. 1971.
5. Bulinski A., Shashkin A. Limit Theorems for Associated Random Fields. 2007.